**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ – ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**Γ’ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν

• η f είναι συνεχής στο [α, β]

• f(α)≠f(β)

τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό **η** μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας τουλάχιστον x0∈(α, β), τέτοιος ώστε f(x0)=**η**.

**Μονάδες 7**

**Α2.** Έστω μια συνάρτηση f και x0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x0;

**Μονάδες 4**

**Α3.** Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο x0∈Α τοπικό ελάχιστο;

**Μονάδες 4**

**Α4.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη*.

**α)** Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι συναρτήσεις fog και gof, τότε ισχύει πάντοτε ότι fog=gof.

**β)** Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών α+βi και γ+δi είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

**γ)** Για κάθε x∈R ισχύει ότι (συνx)΄=ημx.

**δ)** Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]. Αν ισχύει ότι f(x)≥0 για κάθε x∈[α, β] και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε .

**ε)** Αν  και f(x)>0 κοντά στο x0, τότε .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

|z-4|=2|z-1|.

**Β1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων αυτών των μιγαδικών αριθμών z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ=2.

**Μονάδες 7**

**Β2.** Έστω , όπου z1, z2 δύο μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος Β1.

Να αποδείξετε ότι:

**α)** ο w είναι πραγματικός και

(μονάδες 4)

**β)** -4≤w≤4.

(μονάδες 7)

**Μονάδες 11**

**Β3.** Αν w= -4, όπου w είναι ο μιγαδικός αριθμός του ερωτήματος Β2, να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους μιγαδικούς αριθούς z1, z2 και να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τις εικόνες Α(z1), Β(z2), Γ(z3) των μιγαδικών αριθμών z1, z2 και z3, με z3=2iz1, είναι ισοσκελές.

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  x∈R.

**Γ1.** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα (0, +∝).

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  έχει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών μία ακριβώς ρίζα.

**Μονάδες 8**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι  για κάθε x>0.

**Μονάδες 4**

**Γ4.** Δίνεται η συνάρτηση .

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο [0, +∝).

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f:R→R για την οποία ισχύουν:

•  για κάθε x∈R και

• f(0)=0.

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι

, x∈R.

**Μονάδες 5**

**Δ2. α)** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

(μονάδες 3)

**β)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , την ευθεία y=x και τις ευθείες x=0 και x=1.

(μονάδες 4)

**Μονάδες 7**

**Δ3.** Να υπολογίσετε το όριο:

.

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:



έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (2, 3).

**Μονάδες 7**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 194.

**Α2.** Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 188.

**Α3.** Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 259.

**Α4. α)** Λάθος, **β)** Σωστό, **γ)** Λάθος, **δ)** Σωστό, **ε)** Σωστό.

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.** Έστω z=x+yi, x,y∈R.

Έχουμε |z-4|=2|z-1|⇔|z-4|2 =4|z-1|2⇔(z-4)



.

Άρα ο γ.τ. είναι κύκλος με κέντρο Ο(0, 0) και ακτίνα ρ=2.

**Β2. α)** 

Έχουμε  και 

Είναι 

. Άρα w∈R

**β)** Έχουμε  οπότε 

.

**Β3.** 



z1+z2=0⇔z1= -z2.

• 

• 

Επειδή (ΑΓ)=(ΒΓ) τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Η f είναι συνεχής στο R ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Για κάθε x∈R έχουμε



 για κάθε  και αφού η f είναι συνεχής στο x=1, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα 

•  αφού

 και 

• 



Άρα 

**Γ2.** Για κάθε x∈R έχουμε:









f(x)= (1).

Επειδή  και η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR, τότε η εξίσωση (1) έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα.

**Γ3.** Αν F είναι μια παράγουσα της f στο R, τότε  για κάθε x∈R.

Έχουμε  (1).

Η F είναι συνεχής στο [2x, 4x] και παραγωγίσιμη στο (2x, 4x) με x>0, οπότε σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ∈(2x, 4x) τέτοιο ώστε:

.

Οπότε F(4x)-F(2x)=2xf(ξ) (2).

Από (1), (2) έχουμε:

.

Επειδή 0<2x<ξ<4x και η f είναι γνησίως αύξουσα τότε f(ξ)<f(4x) ή 2xf(ξ)<2xf(4x).

Άρα 

**Γ4.** Για κάθε x∈(0, +∝) έχουμε 

• Αφού η f είναι συνεχής στο (0, +∝) τότε η συνάρτηση  είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∝).

• H g1(x)  είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∝) ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων  και 4x.

• Η g2(x)= είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∝) ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων  και 2x.

Άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∝) ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε η g είναι και συνεχής στο (0, +∝).

Για κάθε x∈(0, +∝) έχουμε







• Για κάθε x∈(0, +∝) από το Γ3 ισχύει 

• Επειδή 0<2x<4x και η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε







Άρα  για κάθε x∈ (0, +∝).

Έχουμε 

=2=g(0)

αφού f συνεχής στο x0=0 τότε

 και 

Επομένως η g είναι συνεχής στο x0=0.

Επειδή η g είναι συνεχής στο [0, +∝) με g΄(x)>0 για κάθε x∈(0, +∝) τότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο [0, +∝).

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.** Για κάθε x∈IR έχουμε:





.

Άρα υπάρχει σταθερά c∈IR ώστε , x∈IR (1)

Για x=0 από (1) προκύπτει:

.

Άρα .

Για κάθε x∈R έχουμε:











Θέτουμε , x∈R οπότε  x∈R.

Επειδή η φ είναι συνεχής στο IR και φ(x)≠0 για κάθε x∈IR, τότε η φ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R

Αφού 

Τότε φ(x)>0 για κάθε x∈IR. Άρα φ(x)= x∈IR⇔

, x∈IR⇔

, x∈IR.

Επειδή για κάθε x∈IR ισχύει .

Τότε , x∈IR.

**Δ2. α)** Η f είναι συνεχής στο ΙR αφού η f παραγωγίσιμη στο IR.

Για κάθε x∈IR έχουμε











Έχουμε 





- Η f είναι κυρτή στο (-∝, 0] αφού η f είναι συνεχής στο (-∝, 0] με f΄(x)>0 στο

(-∝, 0) με f΄(x)>0 στο (-∝, 0).

- Η f είναι κοίλη στο [0, +∝) αφού η f είναι συνεχής στο [0, +∝) με f΄(x)<0 στο

(0, +∝).

Το σημείο (0, 0) είναι σημείο καμπής της Cf αφού η f΄΄ μηδενίζεται στο x0=0 και εκατέρωθεν αυτό αλλάζει πρόσημο.

**β)** Η εφαπτομένη ε της Cf στη σημείο της Ο(0, 0) έχει εξίσωση

ε: y-f(0)=f΄(0)(x-0)⇔ y=x

Επειδή η f είναι κοίλη στο [0, +∝) τότε  για κάθε x∈[0, +∝) (η ισότητα ισχύει μόνο για x=0).

Άρα Ε(Ω)=





=





 τ./μ.

**Δ3.**

• Επειδή η f είναι συνεχής στο 0 τότε 

• Αφού η συνάρτηση f2(t) είναι συνεχής στο IR, τότε η  είναι παραγωγίσιμη στο IR και άρα είναι συνεχής στο IR.

Επειδή η h συνεχής στο 0 τότε 

• Είναι f(x)>0 για κάθε x∈(0, +∝). Οπότε |f(x)|=f(x) για κάθε x∈(0, +∝).

Έχουμε 

**αφού** • 



, αφού 

• 



Αφού  και  (Είναι  και f(x)>0 για x>0).

**Δ4.** Για κάθε x∈(2, 3) έχουμε





Θεωρούμε τη συνάρτηση



• Οι συναρτήσει x-2 και x-3 είναι συνεχείς στο [2, 3] ως πολυωνυμικές

• Οι συναρτήσεις f(t) και t2 είναι συνεχείς στο [2, 3] ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Επομένως η συνάρτηση  είναι παραγωγίσιμη στο [2, 3] και επειδή η συνάρτηση x-2 είναι παραγωγίσιμη στο [2, 3] τότε η συνάρτηση  είναι παραγωγίσιμη στο [2, 3] ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων και άρα είναι συνεχής στο [2, 3].

• Η συνάρτηση f2(t) είναι συνεχής στο [2, 3] οπότε η συνάρτηση  είναι παραγωγίσιμη στο [2, 3] και άρα είναι συνεχής στο [2, 3]. Επομένως η g είναι συνεχής στο [2, 3] ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων

g(2)=

g(3)=

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο IR, αφού , x∈IR.

Άρα f(x)≥f(0), x∈[0,+∝). Οπότε f(x)≥0, x∈[0,+∝)

Ισχύει 0≤f(x) ≤x για κάθε x∈[0, +∝) (Η ισότητα ισχύει μόνο για x=0)

• Η συνάρτηση K(t)=t2-f2(t), t∈[0, 2] είναι συνεχής στο [0, 2] με K(t)≥0 για κάθε t∈[0, 2] και η Κ δεν είναι παντού μηδέν στο [0, 2]

Άρα 











• Η συνάρτηση Η(t)=t2-f(t2) t∈[0, 1] είναι συνεχής στο [0, 1] με Η(t)≥0, για κάθε t∈[0, 1] και η Η δεν είναι παντού μηδέν στο [0, 1], άρα







.

Επομένως , οπότε σύμφωνα με το g(3)>0 θεώρημα Bolzano η εξίσωση g(x)=0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (2, 3)

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ

**«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ**

[**www.floropoulos.gr**](http://www.floropoulos.gr)

**ΚΟΥΣΗΣ Π. - ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Γ. – ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Β. – ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α. – ΦΩΤΟΥ Φ.**